$$A = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix} cm^2 \qquad x = \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ -20 \end{bmatrix} mm \qquad n := \mathrm{length}(A)$$

`x.S:sum` [↓] [⇆] `A[j` [Leert.] `x[j` [→] [→] [→] [→] `j` [→] `1` [→] `n` [Leert.]
`/sum` [⇆] `A=`

$$x_S := \frac{\sum_{j=1}^{n} \left(A_j \cdot x_j\right)}{\sum A} = 17{,}1\ mm$$

Im Nenner steht eine verkürzte Form des Summenzeichens, diese summiert über alle Elemente eines Vektors und kann über den Dialog „Funktion einfügen" oder die Tastatur eingegeben werden, dabei ist `sum(1)` auszuwählen.

Die Summe im Zähler kann auch als Skalarprodukt geschrieben werden, das gibt eine kompaktere Schreibweise, die aber weniger verständlich ist und daher vermieden werden sollte:

$$x_S := \frac{A \cdot x}{\sum A} = 17{,}1\ mm$$

Nun noch ein Beispiel für ein Produkt. Die Fakultät einer Zahl ist gleich dem Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis zu dieser Zahl:

$$\prod_{i=1}^{10} i = 3628800 \qquad 10! = 3628800$$

4.7.9. Vektorrechnung in kartesischen Koordinaten

Vektoren werden durch Spaltenmatrizen ihrer kartesischen Koordinaten dargestellt. Entsprechend werden Tensoren als quadratische Koordinatenmatrizen dargestellt.

Basis, Vektorkomponenten und Vektorkoordinaten

Basisvektoren im kartesischen Koordinatensystem:

$$e_x := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad e_y := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad e_z := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Man kann Basisvektoren auch als Funktion definieren. Der i-te Basisvektor ist die i-te Spalte in einer Einheitsmatrix passender Dimension (hier 3):

$$e(k) := \mathrm{col}(\mathrm{identity}(3)\,;\,k) \qquad e(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad e(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad e(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ein physikalischer Vektor kann dargestellt werden als Summe aus den Produkten einheitenbehafteter Koordinaten und den zugehörigen Basisvektoren. F_x, F_y, F_z seien beispielsweise die Koordianten eines Kraftvektors:

$$F_x := 1\ N \qquad F_y := 3\ N \qquad F_z := 2\ N$$

Dann sind die Produkte dieser Koordinaten mit den zugehörigen Basisvektoren die sogenannten Komponenten des Kraftvektors in Richtung der Koordinatenachsen. Merke: *Koordinaten* sind (gegebenenfalls einheitenbehaftete) Zahlen, *Komponenten* sind Vektoren, haben also eine Richtung.

$$F_x \cdot e_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} N \qquad F_y \cdot e_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} N \qquad F_z \cdot e_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} N$$

Die Summe der Komponenten ergibt den kompletten Kraftvektor:

$$F := F_x \cdot e_x + F_y \cdot e_y + F_z \cdot e_z \qquad F = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} N$$

Man kann auch direkt die Koordinaten in eine Spaltenmatrix schreiben:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} N$$

Mit SMath kann man die Koordinaten eines Vektors mit der Indexfunktion ansprechen:

$$F_1 = N \qquad F_2 = 3\ N \qquad F_3 = 2\ N$$

Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren **a** und **b** ist eine Zahl, die gleich dem Produkt aus dem Betrag |**a**|des einen, dem Betrag |**b**| des anderen und dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels ist. In kartesischen Koordinaten ist dies gleich der Summe über die Produkte der Koordinaten beider Vektoren:

$$a := \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \qquad b := \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \qquad a \cdot b = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

Die Basisvektoren kartesischer Koordinatensysteme haben die Länge 1 und stehen senkrecht aufeinander. Daher hat das Skalarprodukt eines Basisvektors mit sich selbst den Wert 1 und mit einem anderen Basisvektor den Wert 0. Solch eine Basis nennt man orthonormiert (rechtwinklig und Länge 1).

```
for i ∈ 1..3
  for j ∈ 1..3
    M[i j] := e(i)·e(j)
```

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Betrag

Der Betrag eines Vektors ist gleich der Wurzel aus dem Skalarprodukt mit sich selbst. Die Funktion `norme()` ist die euklidische Vektornorm und liefert ebenfalls den Betrag eines Vektors.

$$F = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} N \qquad F \cdot F = 14\, N^2 \qquad \sqrt{F \cdot F} = 3{,}7417\, N \qquad \mathrm{norme}(F) = 3{,}7417\, N$$

$$\sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad \text{(symbolische Auswertung)}$$

Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren **a** und **b** ist gleich einem Vektor, der auf beiden Vektoren senkrecht steht und dessen Betrag gleich der von **a** und **b** aufgespannten Trapezfläche ist. Diese Fläche wiederum ist gleich dem Produkt aus den Beträgen von **a** und **b** und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels. Das Kreuzprodukt kann sehr einfach aus den kartesischen Koordinaten der beiden Vektoren berechnet werden. In SMath steht dafür aber eine separate Funktion bereit, erreichbar über den Knopf im Panel „Matrizen" der Seitenleiste oder Strg-8 .

$$a \times b = \begin{bmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{bmatrix}$$

Die Kreuzprodukte zweier Basisvektoren liefern jeweils den senkrecht auf beiden stehenden, also den dritten Basisvektor:

$$e_x \times e_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad e_y \times e_z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad e_z \times e_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Spatprodukt

Das Spatprodukt dreier Vektoren ist das Volumen des von diesen drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds (Spat).

$$c := \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} \qquad a \cdot (b \times c) = a_x \cdot \left(b_y \cdot c_z - b_z \cdot c_y\right) + a_y \cdot \left(b_z \cdot c_x - b_x \cdot c_z\right) + a_z \cdot \left(b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x\right)$$

$$\text{(symbolische Auswertung)}$$

4.8. Listen

Listen sind eindimensionale Felder, die in SMath als Spalte mit einer geschweiften Klammer links angezeigt werden.